Contrôle Insensibilisant de l'équation de la chaleur semi-linéaire avec contraintes finies sur le contrôle

Option : Contrôle optimal

Présentée par :

Yacouba SIMPORE

Université Ouaga 1 Professeur Joseph KI-ZERBO / L.A.M.I

Année 2016

Plan de L'exposé

- Introduction

Plan de L'exposé

- Introduction
- Position du problème et résultat principal

Plan de L'exposé

- Introduction
- Position du problème et résultat principal
- Preuve du résultat

Plan de L'exposé

- Introduction
- Position du problème et résultat principal
- Preuve du résultat
- Perspectives

Introduction

La modélisation mathématiques des problèmes d'environnement et de dynamique des populations conduit dans bon nombre de cas à des systèmes à données incomplètes. Par données, nous entendons les conditions initiales, le second membre et éventuellement les conditions aux limites.

Position et reduction du problème

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + f(y) = \xi + \chi_\omega h \text{ dans }]0, T[\times \Omega \\ y(t, x) = 0 \text{ sur } \Sigma \\ y(0, x) = y^0 + \tau \hat{y}^0 \text{ dans } \Omega \end{cases} \tag{1}$$

On considère la fonctionnelle

$$\Phi(y) = \int_0^T \int_\Theta F(y)\, dxdt. \tag{2}$$

Dans la litterature le cas de la fonctionnelle quadratique est le plus étudié.
Ici, on étudie le cas général avec les hypothèses suivantes sur F :
$F \in C^2(\mathbb{R})$ et F' globalement lipschitzienne .
La condition d'insensibilité est donnée par :

$$\frac{\partial \Phi(y)}{\partial \tau}(0) = \int_0^T \int_\Theta F'(y)\, y_\tau dxdt = 0, \tag{3}$$

avec y_τ une solution du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_\tau}{\partial t} - \Delta y_\tau + f'(y(0))\, y_\tau = 0 \text{ dans }]0, T[\times \Omega \\ y_\tau(t, x) = 0 \text{ sur } \Sigma \\ y_\tau(0, x) = \hat{y}^0 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \tag{4}$$

On a.

Reduction du problème

Proposition

Soit le système en cascade suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + f(y) = \xi + \chi_\omega h \text{ dans }]0,T[\times \Omega \\ y(t,x) = 0 \text{ sur } \Sigma \\ y(0,x) = y^0(x) \text{ dans } \Omega \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial q}{\partial t} - \Delta q + f'(y)\,q = F'(y)\,\chi_\Theta \text{ dans }]0,T[\times \Omega \\ q(t,x) = 0 \text{ sur } \Sigma \\ q(T,x) = 0 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \tag{6}$$

La condition d'insensibilité est équivalente à trouver h appelé contrôle tel que $q(0,x) = 0$ pp dans Ω.

Résultat de contrôle insensibilisant avec contraintes finies

Soit $K_\omega = \langle \chi_\omega e_1, ..., \chi_\omega e_M \rangle$. Posons Π la projection orthogonale de $L^2(]0, T[\times\omega)$ sur K_ω et $K_\omega^\perp$ l'orthogonal de K_ω

On suppose que :

- $F \in C^2(\mathbb{R})$, F' globalement lipschitzienne et $F'(x) \neq 0$ pour tout $x \neq 0$,
- $F''(0) \neq 0$,
- f est globalement lipschitzienne sur $\mathbb{R}$,
- la famille $\{e_1(T,.),\ldots,e_M(T,.)\}$ est linéairement indépendante.

Théorème

Soit $y^0 = 0$ et $\omega \cap \Theta \neq \emptyset$. Sous les hypothèses sur F, f et la famille $\{e_1(T,.),\ldots,e_M(T,.)\}$, il existe un contrôle $h \in K_\omega^\perp$ qui rend insensible la fonctionnelle donnée par (2).

Le théorème suivant peut être réformuler de la façon suivante :

Proposition

Sous les hypothèses du Théorème il existe $h \in K_{\omega}^{\perp}$ tel que (y, q) solution de $(5)-(6)$ vérifie $q(0, x) = 0$.

Cette Preuve est basée sur l'inégalité d'observabilité suivante.

Inégalité d'observabilité

Soit $H \in L^{\infty}(Q)$, $a \in L^{\infty}(Q)$ et $b \in L^{\infty}(Q)$. Soit le système linéaire adjoint :

$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial w}{\partial t} - \Delta w + a(t,x)\, w = 0 \text{ dans } Q \\ w(t,x) = 0 \text{ sur } \Sigma \\ w(0,x) = w^{0}(x) \text{ dans } \Omega \end{array} \right. \tag{7}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} -\dfrac{\partial z}{\partial t} - \Delta z + b(t,x)\, z = \chi_{\Theta} H(t,x)\, w \text{ dans } Q \\ z(t,x) = 0 \text{ sur } \Sigma \\ z(T,x) = 0 \text{ dans } \Omega. \end{array} \right. \tag{8}$$

On a :

Proposition

Supposons qu'il existe une boule $B \subset \omega \cap \Theta$ telle que $H(t,x) \neq 0$ pp sur $]0,T[\times B$. Alors, Il existe une constante $C > 0$ telle que (w,z) solution du système $(7)-(8)$ vérifie l'inégalité

$$\int_0^T \int_\Omega z^2 dtdx \leq C \int_0^T \int_\omega |z - \Pi z|^2 dxdt. \tag{9}$$

Pour la preuve, on procède par absurde

Démonstration.

Soit (w_n, z_n) une suite d'éléments solution du système $(7)-(8)$ avec w_0^n condition initiale de (7) telle que :

$$\begin{cases} \|w_0^n\|_{L^2(\Omega)} = 1 \text{ et} \\ \frac{1}{n}\int_0^T \int_\Omega z_n^2 dtdx \geq \int_0^T \int_\omega |z_n - \Pi z_n|^2 dtdx. \end{cases} \tag{10}$$

On montre que si la condition (10) est vérifiée alors $(w_n, z_n) \longrightarrow (w, z)$ avec $w(0,x) = 0$ p.p dans Ω. Ce qui contrédit le fait que $\|w_0^n\| = 1$ $\square$

Preuve du théorème

On définit maintenant les fonctions

$$\begin{aligned} g(\eta) &= \begin{cases} \frac{f(\eta)}{\eta} \text{ si } \eta \neq 0 \\ f'(0) \text{ si } \eta = 0 \end{cases} \\ H(\eta) &= \begin{cases} \frac{F'(\eta)}{\eta} \text{ si } \eta \neq 0 \\ F''(0) \text{ si } \eta = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Contrôlabilité approchée du système linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} - \Delta y_\varepsilon + g(\eta)\, y_\varepsilon = \xi + \chi_\omega h \text{ dans } (0,T)\times\Omega \\ y_\varepsilon(t,x) = 0 \text{ sur } \Sigma \\ y_\varepsilon(0,x) = 0 \text{ dans } \Omega \end{array} \right. \tag{11}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} -\dfrac{\partial q_\varepsilon}{\partial t} - \Delta q_\varepsilon + f'(\eta)\, q_\varepsilon = H(\eta)\, y_\varepsilon \chi_\Theta \text{ dans } (0,T)\times\Omega \\ q_\varepsilon(t,x) = 0 \text{ sur } \Sigma \\ q_\varepsilon(T,x) = 0 \text{ dans } \Omega \end{array} \right. \tag{12}$$

Soit le système en cascade suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} - \Delta w + g(\eta)\, w = 0 \text{ dans } Q \\ w(t,x) = 0 \text{ sur } \Sigma \\ w(0,x) = w^0(x) \text{ dans } \Omega \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial z}{\partial t} - \Delta z + f'(\eta)\, z = \chi_\Theta H(\eta)\, w \text{ dans } Q \\ z(t,x) = \text{ sur } \Sigma \\ z(T,x) = 0 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \tag{14}$$

Des conditions sur F et f, la solution du système (14) vérifie l'estimation (9).

Soit $\xi \in L^2(Q)$, $\varepsilon > 0$ donnés.
Pour $w^0 \in L^2(\Omega)$ on définit la fonctionnelle suivante :

$$J_\varepsilon\left(w^0, a, b, H\right) = \frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega |z - \Pi z|^2\, dxdt + \int_0^T\int_\Omega \xi z dxdt + \varepsilon\left\|w^0\right\|_{L^2(\Omega)}. \quad (15)$$

$J_\varepsilon\left(w^0,.,.,.\right)$ est continue, strictement convexe et vérifie

$$\lim_{\|w^0\|_{L^2(\Omega)}\to\infty} \inf \frac{J_\varepsilon\left(w^0,a,b,H\right)}{\|w^0\|_{L^2(\Omega)}} \geq \varepsilon. \tag{16}$$

Par conséquent, J_ε atteint son minimum en un point $\hat{w}^0 \in L^2(\Omega)$. Quand $\hat{w}^0 \neq 0$, J_ε satistait la condition d'optimalité suivante :

$$\int_0^T\int_\omega \left(\hat{z}_\varepsilon - \Pi\hat{z}_\varepsilon\right) z dt dx + \int_0^T\int_\Omega \xi z dt dx + \frac{\varepsilon}{\|w^0\|_{L^2(\Omega)}}\int_\Omega \hat{w}^0 w^0 dx = 0, \tag{17}$$

pour tout $w^0 \in L^2(\Omega)$ et (w,z) correspondant à la solution du système $(13)-(14)$.

De plus, il existe $C > 0$ indépendant de ε, tel que

$$\int_0^T \int_\omega |\hat{z}_\varepsilon - \Pi \hat{z}_\varepsilon|^2 \, dxdt \leq C \, \|\xi\|_{L^2(e_M)} \tag{18}$$

Soit donc $\hat{w}_\varepsilon^0$ le minimiseur de J_ε et $\hat{z}_\varepsilon$ la solution associée à de $\hat{w}_\varepsilon^0$.
La fonction

$$\chi_\omega L(\hat{z}_\varepsilon) = \chi_\omega(\hat{z}_\varepsilon - \Pi\hat{z}_\varepsilon) \in K_\omega^\perp.$$

est le contrôle approché du système linéaire.

Le système en cascade linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} - \Delta y_\varepsilon + g(\eta)\, y_\varepsilon = \xi + \chi_\omega L(\hat{z}_\varepsilon) \text{ dans } (0,T)\times\Omega \\ y_\varepsilon(t,x) = 0 \text{ sur } \Sigma \\ y_\varepsilon(0,x) = 0 \text{ dans } \Omega \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial q_\varepsilon}{\partial t} - \Delta q_\varepsilon + f'(\eta)\, q_\varepsilon = H(\eta)\, y_\varepsilon \chi_\Theta \text{ dans } (0,T)\times\Omega \\ q_\varepsilon(t,x) = 0 \text{ sur } \Sigma \\ q_\varepsilon(T,x) = 0 \text{ dans } \Omega \end{cases} \tag{20}$$

satisfait

$$\|q_\varepsilon(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon. \tag{21}$$

d'où le résultat de contrôlabilité approchée du système linéaire.

Soit maintenant

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_\varepsilon & : & L^2(Q) \longrightarrow L^2(Q) \longrightarrow L^2(Q) \\ \eta & \longmapsto & \hat{z}_\varepsilon(\eta) \longmapsto y_\varepsilon(\eta) \end{array}$$

Proposition

Λ_ε est borné, continu et compact dans $L^2(Q)$.

L'opérateur Λ_ε admet un point fixe d'après Schauder et le système en cascade $(19)-(20)$ dévient.

$$\left\{\begin{array}{c} \dfrac{\partial y_\varepsilon}{\partial t}-\Delta y_\varepsilon+f(y_\varepsilon)=\xi+\chi_\omega L(\hat{z}_\varepsilon)\text{ dans }(0,T)\times\Omega \\ y_\varepsilon(t,x)=0\text{ sur }\Sigma \\ y_\varepsilon(0,x)=0\text{ dans }\Omega \end{array}\right. \tag{22}$$

$$\left\{\begin{array}{c} -\dfrac{\partial q_\varepsilon}{\partial t}-\Delta q_\varepsilon+f'(y_\varepsilon)\,q_\varepsilon=F'(y_\varepsilon)\chi_\Theta\text{ dans }(0,T)\times\Omega \\ q_\varepsilon(t,x)=0\text{ sur }\Sigma \\ q_\varepsilon(T,x)=0\text{ dans }\Omega. \end{array}\right. \tag{23}$$

De ce qui précède, on a :

- $\int_0^T \int_\Omega |\hat{z}_\varepsilon - \Pi \hat{z}_\varepsilon|^2 \, dxdt \leq C \|\xi\|_{L^2(e_M)}$ où C est une constante indépendante de ε.

De ce qui précède, on a :

- $\int_0^T \int_\Omega |\hat{z}_\varepsilon - \Pi \hat{z}_\varepsilon|^2 \, dxdt \leq C \|\xi\|_{L^2(e_M)}$ où C est une constante indépendante de ε.
- $\|q_\varepsilon(0,.)\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon$.

De ce qui précède, on a :

- $\int_0^T \int_\Omega |\hat{z}_\varepsilon - \Pi\hat{z}_\varepsilon|^2 \, dxdt \leq C \|\xi\|_{L^2(e_M)}$ où C est une constante indépendante de ε.
- $\|q_\varepsilon(0,.)\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon$.
- De la bornitude de $L(\hat{z}_\varepsilon)$, on déduit qu'il existe une suite encore notée $(y_\varepsilon, q_\varepsilon, L(\hat{z}_\varepsilon))$ telle que si ε tend vers zéro $y_\varepsilon \longrightarrow y$ dans $L^2(Q)$, $q_\varepsilon \longrightarrow q$ dans $L^2(Q)$ et $L(\hat{z}_\varepsilon) \rightharpoonup h$ dans $L^2(Q)$.

De ce qui précède, on a :

- $\int_0^T \int_\Omega |\hat{z}_\varepsilon - \Pi\hat{z}_\varepsilon|^2 \, dxdt \leq C \|\xi\|_{L^2(e_M)}$ où C est une constante indépendante de ε.
- $\|q_\varepsilon(0,.)\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon$.
- De la bornitude de $L(\hat{z}_\varepsilon)$, on déduit qu'il existe une suite encore notée $(y_\varepsilon, q_\varepsilon, L(\hat{z}_\varepsilon))$ telle que si ε tend vers zéro $y_\varepsilon \to y$ dans $L^2(Q)$, $q_\varepsilon \to q$ dans $L^2(Q)$ et $L(\hat{z}_\varepsilon) \rightharpoonup h$ dans $L^2(Q)$.
- De plus (y,q) est solution du système $(5-6)$ et $q(0,x) = 0$ p.p dans Ω.

De ce qui précède, on a :

- $\int_0^T \int_\Omega |\hat{z}_\varepsilon - \Pi\hat{z}_\varepsilon|^2 \, dxdt \leq C \, \|\xi\|_{L^2(e_M)}$ où C est une constante indépendante de ε.
- $\|q_\varepsilon(0,.)\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon$.
- De la bornitude de $L(\hat{z}_\varepsilon)$, on déduit qu'il existe une suite encore notée $(y_\varepsilon, q_\varepsilon, L(\hat{z}_\varepsilon))$ telle que si ε tend vers zéro $y_\varepsilon \longrightarrow y$ dans $L^2(Q)$, $q_\varepsilon \longrightarrow q$ dans $L^2(Q)$ et $L(\hat{z}_\varepsilon) \rightharpoonup h$ dans $L^2(Q)$.
- De plus (y, q) est solution du système $(5-6)$ et $q(0,x) = 0$ p.p dans Ω.
- Comme K_ω est un sous espace fermé de $L^2(]0,T[\times\omega)$ alors $h \in K_\omega^\perp$

Perspectives

Nous allons nous intéressé maintenant aux problèmes de contrôle insensibilisant dont la donnée manquante est la frontière du domaine.

Merci de votre Aimable Attention ! ! ! ! !